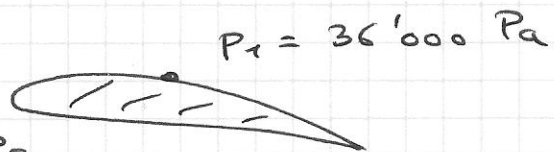


Exercice 4.1

$$T_{\infty} = 245 \text{ K}$$

$$p_{\infty} = 43'500 \text{ Pa}$$



Si p_0 et ρ_0 sont les grandeurs totales (de réservoir) en amont, alors :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} \quad \text{pour un écoulement isentrope.}$$

$$\text{Donc:} \quad \frac{p_{\infty}}{p_0} = \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho_0} \right)^{\gamma}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{\gamma}$$

$$\text{Par division:} \quad \frac{p_{\infty}}{p_1} = \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho_1} \right)^{\gamma} \Rightarrow \rho_1 = \rho_{\infty} \left(\frac{p_1}{p_{\infty}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{Avec:} \quad \rho_{\infty} = \frac{p_{\infty}}{r T_{\infty}} \quad (\text{gaz parfait})$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{p_{\infty}}{r T_{\infty}} \left(\frac{p_1}{p_{\infty}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\text{Application numérique:} \quad \rho_1 = 0,540 \text{ kg/m}^3$$

Exercice 4.2

Transformation adiabatique:

$$h_0 = h + \frac{1}{2} u^2$$

Gaz (air) calorifiquement parfait:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} u^2$$

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$$

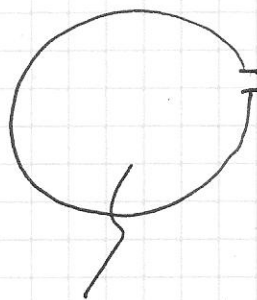
$$\Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{2\gamma r}{\gamma - 1} (T_0 - T)}}$$

Application numérique:

$$\gamma = 1,4$$

$$r = 287 \text{ J/kg.K}$$

$$\Rightarrow u \approx 173,6 \text{ m/s}$$



Valve:

$$T = 15^\circ\text{C}$$

u ?

Chambre à air:

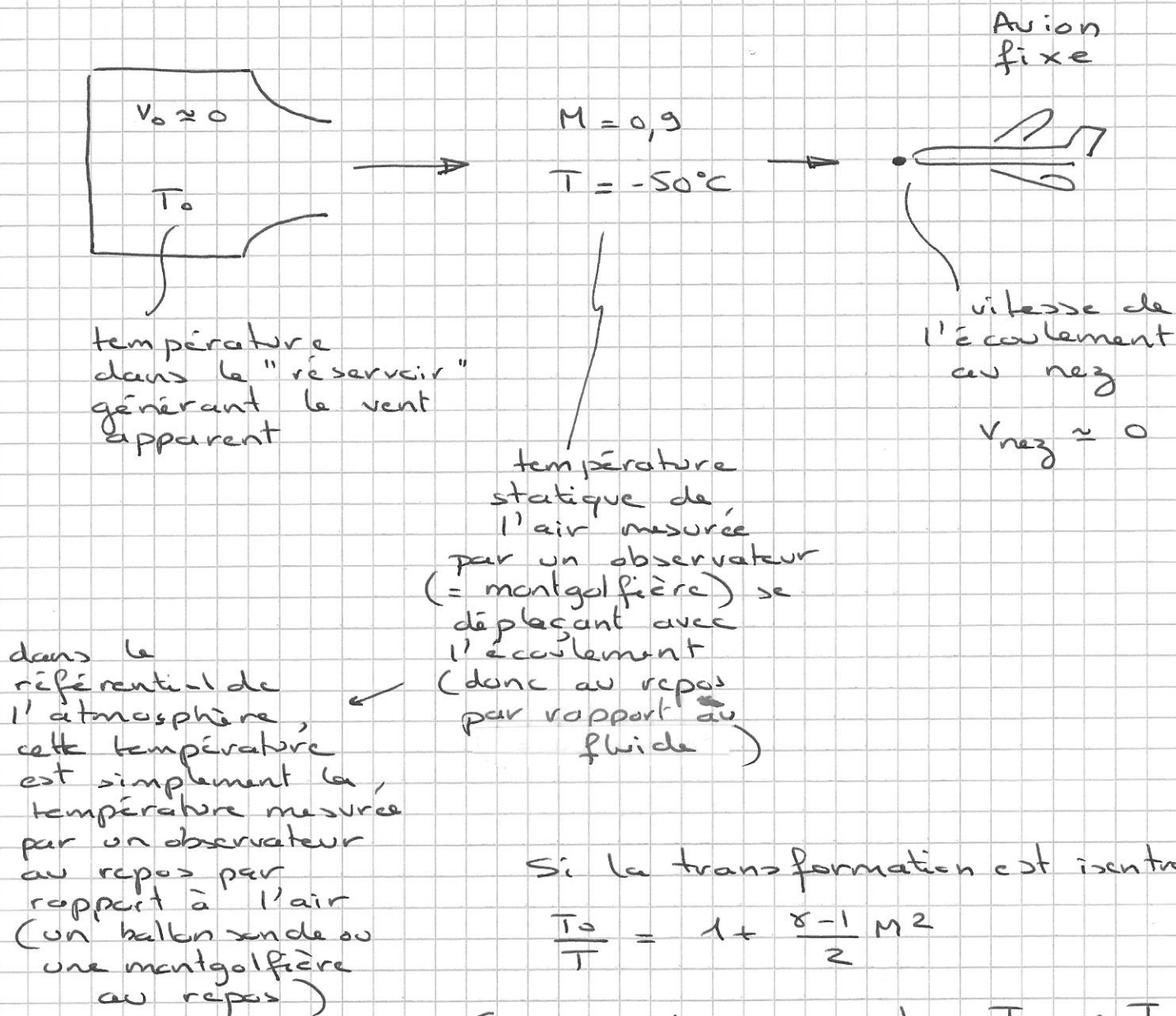
$u_0 \approx 0$ (réservoir)

$$T_0 = 30^\circ\text{C}$$

Exercice 4.3

Dans le référentiel de l'atmosphère, l'écoulement n'est pas permanent. En effet, en un endroit proche de la trajectoire de l'avion, l'air est d'abord au repos avant le passage de l'avion ($\partial v / \partial t \approx 0$) alors que peu après, la vitesse en ce même point variera à cause du passage de l'avion ($\partial v / \partial t \neq 0$).

Il faut donc que l'on se place dans un référentiel où l'écoulement est permanent: référentiel fixe par rapport à l'avion.



$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Comme $v_{\text{nez}} \approx 0$, alors $T_{\text{nez}} \approx T_0$

$$\Rightarrow T_{\text{nez}} \approx T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Application : $T_{\text{nez}} \approx (223 \text{ K}) \left[1 + \frac{1,4 - 1}{2} (0,9)^2 \right]$
numérique

$$\Rightarrow T_{\text{nez}} \approx 259 \text{ K} = -14^\circ\text{C}$$

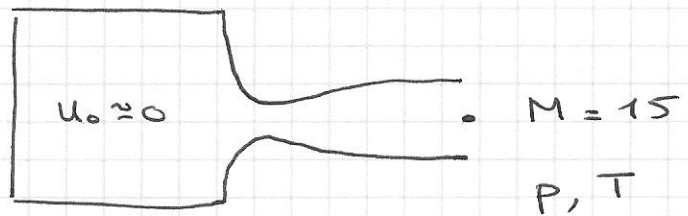
Exercice 4.4

L'hélium est un gaz monoatomique:

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

quelle que soit la température

Réservoir



$$p_0 = 50 \text{ atm}$$

$$T_0 = 800 \text{ K}$$

On fait l'hypothèse que l'écoulement est isentrope.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \end{aligned}}$$

Application numérique:

$$T \approx 10,5 \text{ K}$$

$$p \approx 9,9 \times 10^{-4} \text{ atm}$$

Avec le diagramme de phase, on constate que l'hélium reste bien gazeux.

4.2

CONVERTIR EN KELVIN

$T_0 = 30^\circ\text{C}$

$T = 15^\circ\text{C}$

$T_0 = 303,15\text{ K}$

$T = 288,15\text{ K}$

$\Rightarrow \frac{T}{T_0} = 0,9505$

Tables:

$M = 0,50 \quad , \quad \frac{T}{T_0} = 0,9524$

$M = 0,52 \quad , \quad \frac{T}{T_0} = 0,9487$

$$\Rightarrow \frac{\frac{T}{T_0} - 0,9487}{0,9524 - 0,9487} = \frac{M - 0,52}{0,50 - 0,52}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M = 0,5103}}$$

Calcul exact:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad , \quad \gamma = 1,4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M = 0,5103}}$$

$$\text{etc ...} \quad (u = M \cdot a = M \cdot \sqrt{\gamma r T})$$

4.3 $M = 0,9 \Rightarrow$ Tables $\frac{T}{T_0} = 0,8606$ ($\gamma = 1,4$)

$\Rightarrow T_0 = \frac{273,15 - 50}{0,8606} = 259,30 \text{ K} = -13,85^\circ$

4.4 Table B.3 $\rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$ (gaz monoatomique)

Il n'y a pas de valeurs tabulées pour $M = 15$
(pour $M = 10$, $\frac{P}{P_0} = 0,0001 \dots$)

donc pour des nombres de Mach élevés, il faut revenir aux formules !

$M = 9,5$

Par interpolation :
(tables)

$\frac{P}{P_0} = 0,0001(5)$

$\frac{T}{T_0} = 0,0324$

chiffre non valable

manque de précision

$\Rightarrow$ tables non conseillées !

$\Rightarrow p = 0,0001(5) \cdot 50 = 0,0075 \text{ atm}$

$1 \text{ atm} = 101'325 \text{ Pa} \rightarrow \boxed{p = 759,9 \text{ Pa}}$

Calcul exact : $\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ avec $\gamma = 1,667$
 $= 5'386,65$

$\Rightarrow \boxed{p = 940,5}$

GROSSE DIFFERENCE

$\Rightarrow$ Ne pas utiliser les tables quand les nombres de Mach sont trop élevés !

$$M = 1,5$$

Table : $\frac{P}{P_0} = 0,2468 \quad \Leftarrow \text{RAPIDE !}$

$$\Rightarrow P = 12,34 \text{ atm}$$

Exact : $\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 4,051$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_0} = 0,2468 \quad \Leftarrow \text{RUS LONG !}$$

Exercice 4.5

a. Comme p , ρ , et s sont des fonctions d'état, on peut écrire:

$$p = p(\rho, s) \Rightarrow dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds$$

$$\rho = \rho(p, s) \Rightarrow d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p ds$$

En combinant ces 2 relations:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p ds \right] + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \right] ds$$

$$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \right] dp = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \right] ds$$

p et s sont des variables indépendantes l'une de l'autre, et donc peuvent varier indépendamment.

En particulier, on peut avoir $ds = 0$ sans que dp soit nul.

Ainsi, les termes entre crochets doivent être tous les deux nuls.

Le premier donne: $1 - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = 0$

ou.
$$\boxed{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s}}$$

Le deuxième donne lieu à une relation bien connue en calcul différentiel à deux variables indépendantes:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho = 0$$

ou, en utilisant un résultat similaire au précédent:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho = -1$$

b. A partir de $\rho = \frac{1}{v}$

on a alors : $dp = d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2} dv$

Ainsi :
$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s} = \frac{1}{-\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s} = -\frac{v^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s}$$

c. Avec : $a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$

$$\Rightarrow a^2 = - \frac{v^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s = \frac{-2v \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s}{\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s} + \frac{v^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s}{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \right]^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s = 2v \left[\frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s - 1 \right]$$

Avec $\Gamma \equiv \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s$ (Fundamental Gas Dynamic Derivative)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial a^2}{\partial P} \right)_s = 2v (\Gamma - 1)$$

$$\left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s = \frac{2(\Gamma - 1)}{\rho}$$

d. Pour un gaz parfait en écoulement isentropique

$$p = k \cdot \rho^\gamma$$

$$\text{Avec } \rho = \frac{1}{v} \Rightarrow v^\gamma = \frac{k}{p} \Rightarrow v = \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = k^{\frac{1}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = k^{\frac{1}{\gamma}} \left(-\frac{1}{\gamma}\right) p^{-\frac{1}{\gamma}-1}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s &= k^{\frac{1}{\gamma}} \left(-\frac{1}{\gamma}\right) \left(-\frac{1}{\gamma}-1\right) p^{-\frac{1}{\gamma}-2} \\ &= \underbrace{k^{\frac{1}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}}}_v \left(\frac{1}{\gamma}\right) \left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) p^{-2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s = \frac{\gamma+1}{\gamma^2} \frac{v}{p^2}$$

$$a^2 = \gamma r T = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma p v$$

$$\rightarrow a^4 = \gamma^2 p^2 v^2$$

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$$

$$= \frac{\cancel{\gamma^2} \cancel{p^2} \cancel{v^2}}{2v^3} \frac{\gamma+1}{\cancel{\gamma^2}} \frac{\cancel{v}}{\cancel{p^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{\gamma+1}{2}} \quad \text{Gaz parfait}$$